# ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΑΣΑΦΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Κουτσφετσούλη Ευανθία
Μαθηματικός, Απόφοιτος
Μεταπτυχ. ΜΣΜ/ΣΘΕΤ, ΕΑΠ
vanakou&gmail.com

Παπαδόπουλος Βασίλειος
Καθηγητής Τμ. Πολ. Μηχανικών ΔΠΘ
Μέλος ΣΕΠ ΜΣΜ/ΣΘΕΤ ΕΑΠ
papadob@civil.duth.gr

***Περίληψη:*** **Η εργασία αυτή πραγματεύεται την ανάλυση σε συστάδες ή αλλιώς ομαδοποίηση (clustering) χρησιμοποιώντας ασαφείς σχέσεις ισοδυναμίας. Η ανάλυση σε συστάδες είναι η ομαδοποίηση ενός συνόλου στοιχείων σε ομάδες ώστε τα στοιχεία που ανήκουν στην ίδια ομάδα να παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιότητα μεταξύ τους, απο τα στοιχεία που ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες. Στο κείμενο αυτό προτείνεται ένας αλγόριθμος βασισμένος στις ασαφείς σχέσεις ισοδυναμίας. Η ομαδοποίηση θα προκύψει με τη δημιουργία του πίνακα ομοιότητας μεταξύ των στοιχείων και της ασαφούς σχέσης ισοδυναμίας που θα κατασκευασθεί σύμφωνα με τον πίνακα. Οι ομάδες σχηματίζονται απο την επιλογή των κατάλληλων α-τομών. Επίσης μελετώνται τα πλεονεκτήματα του αλγορίθμου έναντι των κλασσικών μεθόδων συσταδοποίησης.**

## I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι πολύ σύνηθες σ' ένα πρόβλημα της καθημερινότητας να παρουσιαστούν ασάφειες ή ανακρίβειες. Παρ' όλα αυτά, τόσο η μοντελοποίηση όσο και η προσπάθεια επίλυσης ενός τέτοιου προβλήματος στηρίζονται, τις περισσότερες φορές, στη δίτιμη Αριστοτέλεια λογική. Μια άλλη προσέγγιση της αβεβαιότητας διατυπώθηκε το 1965 από τον Πέρση Καθηγητή Lofti A. Zadeh και την εισαγωγή της ασαφούς λογικής που είναι μια πλειότιμη λογική, επέκταση της κλασσικής και εισάγει την έννοια της ασάφειας και της αοριστίας. Εκτός, δηλαδή, από τις τιμές 0 για το ψευδές και 1 για το αληθές, στην ασαφή λογική έχουμε ως τιμή αλήθειας οιαδήποτε τιμή του διαστήματος [0,1]. Σκοπός στην εργασία αυτή είναι να παρουσιάσουμε την ασαφή λογική και τις βασικές αρχές της και να ορίσουμε τις ασαφείς σχέσεις ισοδυναμίας με τη βοήθεια των οποίων καταλήγουμε σ' ένα δένδρο διάγραμμα ομαδοποίησης των δεδομένων μας που είναι και ο πυρήνας του αλγορίθμου που παρουσιάζεται τελικά. Ο αλγόριθμος αυτός εφαρμόζεται για την ομαδοποίηση περιοχών της Βορείου Ελλάδος ως προς την ποιότητα του πόσιμου νερού και παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή αυτή.

## II. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στο πρώτο μέρος αυτής της μελέτης, πραγματοποιείται βιβλιογραφική επισκόπηση της ασαφούς λογικής η οποία εισάγεται μέσα από τη κλασσική λογική διευρύνοντας έννοιες όπως σύνολο, πράξεις συνόλων, σχέσεις. Στη συνέχεια μελετάται η ανάλυση σε συστάδες ως ένα πολύ σημαντικό εργαλείο που χρησιμοποιείται ευρέως στην ανάλυση προτύπων, στην έρευνα αγοράς αλλά και σε πολλές επιστημονικές έρευνες. Στην εργασία, ο προτεινόμενος αλγόριθμος εφαρμόζεται, τελικά, για να ομαδοποιήσει περιοχές ως προς την ποιότητα νερού τους. Σύμφωνα με το νομοθετικό πλαίσιο της Ευρωπαϊκής Ένωσης, τα κράτη είναι υποχρεωμένα να θεσπίσουν προγράμματα ελέγχου του πόσιμου νερού που διατίθεται προς κατανάλωση. Από τα προγράμματα παρακολούθησης συχνά προκύπτουν μεγάλες και πολύπλοκες βάσεις δεδομένων που η ερμηνεία τους χρειάζεται εξειδικευμένες μεθόδους ανάλυσης.

Για την ερμηνεία των δεδομένων και την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων ως προς την ποιότητα του πόσιμου νερού, χρησιμοποιούνται κυρίως μέθοδοι της πολυμεταβλητης στατιστικής ανάλυσης όπως ανάλυση σε συστάδες, παραγοντική ανάλυση. Οι μέθοδοι της παραγοντικής ανάλυσης χρησιμοποιούνται συνήθως για την μείωση των παραμέτρων που ελέγχονται και την εύρεση των πιο σημαντικών εξ'αυτών, ενώ η συσταδοποίηση χρησιμοποιείται για την εύρεση, παρόμοιων ως προς την ποιότητα νερού, σημείων ελέγχου. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα του προτεινόμενου αλγορίθμου που βασίζεται στις ασαφείς σχέσεις ισοδυναμίας είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο σαν μέθοδος παραγοντικής ανάλυσης όσο και σαν μέθοδος ανάλυσης σε συστάδες. Οι περιοχές που μελετάμε ανήκουν στους δήμους Κοζάνης, Κομοτηνής και Δράμας και συλλέχθηκαν από τις υπεύθυνες ΕΥΑ. Με την εφαρμογή του αλγορίθμου σύμφωνα με τα δεδομένα που συλλέξαμε ομαδοποιήσαμε τις περιοχές σε ομάδες.

## III. ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Την ασαφή λογική πρωτοπαρουσίασε ο Lofti A. Zadeh με την εισαγωγή των ασαφών συνόλων. Η ασαφής λογική μπορεί να εκφράσει καλύτερα την αβεβαιότητα και την ασάφεια που υπεισέρχονται σε παραμέτρους προβλημάτων των οποίων οι πληροφορίες μπορεί να είναι ημιτελείς, ανακριβείς, μη ρεαλιστικές ή ανεπαρκείς για κάποιο λόγο (Klir and Yuan, 1995), όπως συνηθίζεται στην καθημερινότητα. Η ασαφής λογική βρίσκει πολλές εφαρμογές, μια από τις οποίες είναι και η συσταδοποίηση (cluster analysis).

Αρχικά εισάγονται οι βασικές έννοιες της κλασσικής λογικής που είναι απαραίτητες για την κατανόηση των αντίστοιχων εννοιών της ασαφούς λογικής. Δεδομένου οτι η τελευταία έρχεται να επεκτείνει κι όχι να αντικαταστήσει την κλασσική λογική κρίθηκε σκόπιμο η εργασία να ξεκινήσει παραθέτοντας βασικά στοιχεία της κλασσικής λογικής.

Ακολούθως, γίνεται μια εισαγωγή στην ασαφή λογική και παρουσιάζουμε τις βασικές αρχές της. Στη συνέχεια δίνονται οι ορισμοί των ασαφών συνόλων καθώς και των πρέξεων μεταξύ των συνόλων αυτών.

Έτσι, ενώ η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου στην κλασσική λογική είναι η

$\mathcal{X}_A : X \longrightarrow \{0,1\}$ με

$$\mathcal{X}_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ x \in A \\ 0 & \alpha\nu\ x \notin A \end{cases}$$

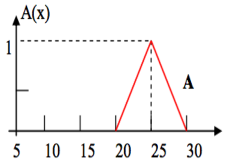
η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός ασαφούς συνόλου παίρνει τιμές απο το κλειστό διάστημα [0,1] και ισχύει

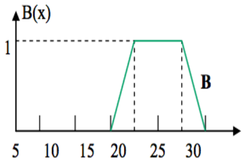
$\mu_A : \mathrm{x} \in \mathrm{X} \longrightarrow \mu_A(x) \in [0,1]$ όπου $\mu_A(x)$ ο βαθμός συμμετοχής του στοιχείου x στο σύνολο Α. Παραθέτουμε τον ορισμό που διατύπωσε ο L.Zadeh για το ασαφές σύνολο

Ορισμός 1: Έστω X ένα σύνολο αναφοράς.Ασαφές υποσύνολο A του συνόλου X ονομάζεται κάθε συνάρτηση $\mu_A(x) : \mathrm{x} \in \mathrm{X} \longrightarrow \mu_A(x) \in [0,1]$, η οποία αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ σε μία τιμή $\mu_A(x)$ και ισχύει $0 \le \mu_A(x) \le 1$ . Η τιμή $\mu_A(x)$ ονομάζεται βαθμός συμμετοχής του x κι εκφράζει το βαθμό συμμετοχής του στοιχείου x στο A.Η συνάρτηση $\mu_A(x)$ ονομάζεται συνάρτηση συμμετοχής

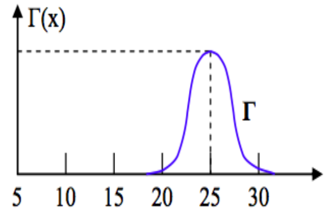
Κάποια παραδείγματα γνωστών ασαφών συνόλων είναι τα παρακάτω:

Τριγωνικό Τραπεζοειδές




Gaussian




Μια σημαντική έννοια των ασαφών συνόλων που θα συναντήσουμε και αργότερα είναι οι α-τομές τους, και αποτελούν τα κλασσικά σύνολα για τα οποία ισχύει

${}^{a}A = \{\, x \in X / \mu_A(x) \ge a \}$.

Έπειτα, εισάγουμε τις ασαφείς σχέσεις ισοδυναμίας.

Με τον όρο *ασαφής σχέση σ* εννοούμε ένα ασαφές υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} = \{(\mathrm{x,y}) /\ \mathrm{x} \in \mathrm{X}, \mathrm{y} \in \mathrm{Y}\}$ το οποίο έχει μια συνάρτηση συμμετοχής $\mu_\sigma$: $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \rightarrow [0,1]$.

Ενώ μια ασαφής σχέση θα καλείται ισοδυναμίας, όταν θα είναι ταυτόχρονα ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Γνωρίζουμε την έννοια του μεταβατικού περιβλήματος που είναι η μικρότερη ασαφής μεταβατική σχέση $\sigma^*$ που περιέχει μια δοσμένη σχέση σ που δεν είναι μεταβατική, καθώς και τις κλάσεις ισοδυναμίας ενός στοιχείου x που είναι κλασσικά σύνολα και περιέχουν τα στοιχεία εκείνα που έχουν ίδιο βαθμό ομοιότητας με το στοιχείο x.

Απο τις πιο συνήθεις δυσκολίες που αντιμετωπίζουμε όταν θέλουμε να διαχωρίσουμε ένα σύνολο σε υποσύνολα είναι να κατασκευάσουμε τη σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των στοιχείων που μας ενδιαφέρουν

Ο προσδιορισμός του μεταβατικού περιβλήματος μιας μη μεταβατικής σχέσης σ γίνεται με βάση τον παρακάτω αλγόριθμο:

- Προσδιορίζουμε τη σχέση $\sigma \circ \sigma$, που είναι η σύνθεση max-min που αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο.
- Προσδιορίζουμε τη σχέση $\sigma \cup (\sigma \circ \sigma) = \sigma^*$
- Αν ισχύει $\sigma = \sigma^*$ τότε η $\sigma^*$ είναι το μεταβατικό περίβλημα της σχέσης σ.Αλλιώς επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία θέτοντας $\sigma^* = \sigma$

Στο τελευταίο μέρος, αναφέουμε τους λόγους για τους οποίους είναι απαραίτητο να μειώσουμε τις διαστάσεις ενός προβλήματος και ο πιο σημαντικός εξ'αυτών είναι ο πλεονασμός πληροφορίας. Στις περιπτώσεις αυτές, είναι αναγκαίο οι μεταβλητές να διαμεριστούν (ομαδοποηθούν) ωστε να είναι πιο εύκολη η κατανόηση τους. Μια απο τις διαδικασίες μείωσης της διάστασης ενός προβλήματος είναι η **ανάλυση κατα συστάδες** (cluster analysis) ή **συσταδοποίηση.** Η ανάλυση κατα συστάδες έχει ως στόχο την ομαδοποίηση ενός συνόλου δειγματοστοιχείων με βάση κάποια κοινά χαρακτηριστικά.Με τη διαδικασία αυτή, κατατάσσονται τα αντικείμενα μιας έρευνας σε δύο ή περισσότερες ομάδες,βάσει της ομοιότητας των παρατηρήσεων.Βασικός στόχος είναι οι ομάδες που θα δημιουργηθούν να έχουν στοιχεία όσο το δυνατόν πιο ομοιογενή, αλλά και ομάδες που να διαφέρουν μεταξύ τους. Οι πιο δημοφιλείς μέθοδοι συσταδοποίησης είναι οι ιεραρχικές μέθοδοι, η μέθοδος K-Means κ.α. Τα μειονεκτήματα των δύο αυτών μεθόδων είναι οτι στις μεν ιεραρχικές μεθόδους ο ορισμός των ομάδων γίνεται εμπειρικά, ενώ στις μη ιεραρχικές πρέπει να είναι εξ' αρχής προκαθορισμένος. Επίσης, στην πρώτη κατηγορία οι ομάδες παραμένουν αμετάβλητες. Τέλος ακόμη ένα μειονέκτημα της επιλογής μικρότερου αριθμού δεδομένων απο τα ήδη υπάρχοντα, με τις παραπάνω διαδικασίες είναι ότι πολλές φορές αυτή η επιλογή γίνεται χωρίς να έχουμε μελετήσει τη σχέση και την αλληλεπίδραση όλων των μεταβλητών μεταξύ τους.

Η μέθοδος που παρουσιάζουμε βασίζεται στη χρήση ασαφών σχέσεων ισοδυναμίας. Μερικά απο τα βασικά πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι:

Δεν είναι απαραίτητος ο καθορισμός του αριθμού των ομάδων (συστάδων) από την αρχή. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος για την ανάλυση κατά συστάδες συμπεριλαμβάνει όλες τις μεταβλητές και αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση όλων των α-τομών. Αναλόγως με την α-τομή που θα χρησιμοποιήσουμε μπορεί να υπάρξει διαφορετικός αριθμός συστάδων

Οι τιμές των α-τομών που χρησιμοποιούνται αντιπροσωπεύουν την ελάχιστη συσχέτιση των μεταβλητών κάθε συστάδας. Με τον τρόπο αυτό δημιουργίας των συστάδων έπεται ότι όλες οι μεταβλητές είναι ισοδύναμες σε κάποιο επίπεδο που επιλέγεται απο το χρήστη. Έτσι μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάποιος αντιπρόσωπος από κάθε συστάδα.

Ο πίνακας εγγύτητας στον οποίο θα αναφερθούμε παρακάτω μπορεί να κατασκευασθεί από ειδικούς. Αυτό το πλεονέκτημα είναι σημαντικό, ιδιαίτερα στην περίπτωση μη ποσοτικοποιήσιμων μεταβλητών ή και στις περιπτώσεις που έχουμε ελλιπή δεδομένα.

Τέλος, ανάλογα με τις ανάγκες, ο αλγόριθμος της μεθόδου δίνει τη δυνατότητα σ'ένα αντικείμενο να ανήκει σε μία και μόνο ομάδα αν ακολουθήσουμε όλα τα βήματα, είτε να μη γίνει χρήση του μεταβατικού περιβλήματος και να ανήκει σε περισσότερες απο μία ομάδα.

Η διαδικασία ξεκινά με τη δημιουργία ενός $n \times n$ πίνακα ομοιότητας, όπου n ο αριθμός των στοιχείων.Τα στοιχεία του πίνακα είναι οι βαθμοί ομοιότητας των αντικειμένων ή των μεταβλητών και παίρνουν τιμές στο διάστημα [0,1].Ο βαθμός ομοιότητας μπορεί να υπολογιστεί με μία απο τις μεθόδους του συνημιτόνου, το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson ή με τη μέθοδο max-min που είναι κι αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην εφαρμογή μας.

Ο προτεινόμενος αλγόριθμος είναι ο παρακάτω:

- Υπολογισμός του βαθμού ομοιότητας για κάθε ζεύγος τιμών και σχηματισμός του πίνακα ομοιότητας.(Αν χρειαστεί λαμβάνουμε τις απόλυτες τιμές των τιμών αναλόγως με ποια μέθοδο επιλέξαμε να υπολογίσουμε τους βαθμούς ομοιότητας)
- Υπολογισμός του μεταβατικού περιβλήματος του πίνακα .
- Εύρεση των ομάδων (συστάδων) με χρήση των πινάκων των α-τομών

Τέλος, κλείνουμε την εργασία αυτή με την παρακάτω εφαρμογή κατά την οποία μελετήσαμε και ομαδοποιήσαμε με τον παραπάνω αλγόριθμο περιοχές του δήμου Κομοτηνής και των δήμων Κοζάνης και Δράμας. Οι τιμές των απαιτούμενων ενδεικτικών παραμέτρων των περιοχών αυτών, είναι μερικές από τις οποίες, σύμφωνα με την οδηγία της Ευρωπαϊκής ένωσης 98/83/ΕΚ καθορίζουν την ποιότητα του πόσιμου νερού. Τα στοιχεία τα συλλέξαμε απο τις ΔΕΥΑ Κομοτηνής, ΔΕΥΑ Δράμας και τη ΔΕΥΑ Κοζάνης.Για πρακτικούς λόγους στην παρούσα εφαρμογή επιλέξαμε τυχαία επτά περιοχές, το Πανόραμα, την Υψηλή, και τον Άγιο Τρύφωνα από το δήμο Δράμας, τη Μηλιά και τη Σκήτη από το δήμο Κοζάνης και τέλος τα Αρριανά και το Κόσμιο του δήμου Κομοτηνής. Οι μετρήσεις αφορούν στην άνοιξη 2015 και συγκεκριμένα πραγματοποιήθηκαν από τις 20/04/2015 έως και 08/05/2015.Επειδή οι τιμές κάποιων παραμέτρων είναι μεγάλες (πχ αγωγιμότητα) ενώ άλλες πολύ μικρές θα ανάγουμε όλες τις τιμές των παραμέτρων στο διάστημα [0,1].Ο βαθμός ομοιότητας μεταξύ των περιοχών θα προκύψει με τη max-min μέθοδο. Αφού βρεθεί ο βαθμός ομοιότητας των περιοχών, έπειτα με την εύρεση των α-τομών θα προκύψουν οι ομάδες (συστάδες). Έτσι έχουμε τον πίνακα ομοιότητας που είναι

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 0.5 & 0.72 & 0.60 & 0.58 & 0.53 & 0.35 \\ 0.50 & 1.00 & 0.67 & 0.82 & 0.68 & 0.44 & 0.50 \\ 0.72 & 0.67 & 1.00 & 0.64 & 0.65 & 0.44 & 0.38 \\ 0.60 & 0.82 & 0.64 & 1.00 & 0.80 & 0.57 & 0.60 \\ 0.58 & 0.68 & 0.65 & 0.80 & 1.00 & 0.50 & 0.54 \\ 0.53 & 0.44 & 0.44 & 0.57 & 0.50 & 1.00 & 0.60 \\ 0.35 & 0.50 & 0.38 & 0.60 & 0.54 & 0.60 & 1.00 \end{pmatrix}$$

ενώ ο πίνακας του μεταβατικού περιβλήματος είναι

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 0.67 & 0.72 & 0.67 & 0.67 & 0.60 & 0.60 \\ 0.67 & 1.00 & 0.67 & 0.82 & 0.80 & 0.60 & 0.60 \\ 0.72 & 0.67 & 1.00 & 0.67 & 0.67 & 0.60 & 0.60 \\ 0.67 & 0.82 & 0.67 & 1.00 & 0.80 & 0.60 & 0.60 \\ 0.67 & 0.80 & 0.67 & 0.80 & 1.00 & 0.60 & 0.60 \\ 0.60 & 0.60 & 0.60 & 0.60 & 0.60 & 1.00 & 0.60 \\ 0.60 & 0.60 & 0.60 & 0.60 & 0.60 & 0.60 & 1.00 \end{pmatrix}$$

Εν συνεχεία, βρίσκουμε τις α-τομές κι έτσι προκύπτουν οι συστάδες (ομάδες)
Για **α=0.6** δημιουργείται μία ομάδα με όλες τις περιοχές $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$
Για **α=0,67** έχουμε τις ομάδες $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\},\{x_6\},\{x_7\}$
Για **α=0,72** έχουμε τις ομάδες $\{x_1,x_3\},\{x_2,x_4,x_5\},\{x_6\},\{x_7\}$
Για **α=0,8** έχουμε τις ομάδες $\{x_1\},\{x_3\},\{x_2,x_4,x_5\},\{x_6\},\{x_7\}$
Για **α=0,82** έχουμε τις ομάδες $\{x_1\},\{x_3\},\{x_2,x_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\}$
Και τέλος για **α=1** έχουμε $\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\}$

## IV. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ι. Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνονται οι τιμές του α δημιουργούνται όλο και περισσότερες ομάδες, για να φτάσουμε στο τέλος στην τετριμμένη περίπτωση όπου κάθε μεταβλητή (περιοχή) αποτελεί από μόνη της μια ομάδα. Έτσι αν αυτός που θα χρησιμοποιήσει τη μέθοδο ενδιαφέρεται για μεγάλη ακρίβεια και υψηλή συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών της κάθε ομάδας θα επιλέξει μια μεγάλη τιμή για το α.
ΙΙ. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή για α=0,72 έχουμε το Πανόραμα και τον Άγιο Τρύφωνα στην ίδια ομάδα, κάτι που είναι αναμενόμενο ως ένα βαθμό, καθώς είναι περιοχές του ίδιου δήμου και άρα η ποιότητα του νερού τους αναμένουμε να είναι παρόμοια. Το ίδιο συμβαίνει και με τη Μηλιά και τη Σκήτη. Βέβαια, στην ίδια ομάδα συμπεριλαμβάνεται και η Υψηλή, η οποία αν και δεν ανήκει στο νομό Κοζάνης, οι τιμές των παραμέτρων και ιδιαιτέρως του υπολειμματικού χλωρίου, είναι πιο κοντά στις τιμές των περιοχών Μηλιά και Σκήτη.
ΙΙΙ. Η μέθοδος αυτή της ομαδοποίησης, που είναι πολύ εύχρηστη θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί από τον κάθε δήμο ξεχωριστά και αφού ομαδοποιήσει τις περιοχές ελέγχου, να κρατήσει από την κάθε ομάδα μία ως αντιπρόσωπο.
IV. Επίσης σε μια πιο γενική μορφή, θα μπορούσαν να ομαδοποιηθούν διάφορες περιοχές ανά την Ελλάδα ως προς την ποιότητα του νερού της κι έτσι να έχουμε μια πιο γενική εικόνα για την ποιότητα του νερού στην Ελλάδα.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ


Klir, G. J., & Bo Yan (1995). *Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and applications.* New Jersey, Prentice Hall.

Ross, T. J. (2004) . *Fuzzy logic with engineering applications* ( 2nd ed. ).England, John Wiley & Sons Ltd.

Lee, K. H. (2005) . *First course on fuzzy theory and applications.* New York, Springer.

Dubois, D., & Prade, H.(1980). *Fuzzy sets and systems: Theory and applications.* New York, Academic Press.

Klir, G. J., & Bo Yuan. (Eds). (1996). *Fuzzy sets, fuzzy logic and fuzzy systems: Selected papers by Lotfi Zadeh.* Singapore, World Scientific publishing.

Μποτζώρης, Γ. ,& Παπαδόπουλος, Β. (2015). *Ασαφή σύνολα. Εφαρμογές στον σχεδιασμό και την διαχείριση έργων μηχανικού.* Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις σοφία.

Τζιμόπυλος, Χ. , & Παπαδόπουλος, Β. (2013). *Ασαφής λογική με εφαρμογές στις επιστήμες του μηχανικού.* Αθήνα, Εκδόσεις Ζήτη.

Θεοδώρου, Γ. (2010). *Εισαγωγή στην ασαφή λογική.* Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Τζιόλα.

Liang, G. S., Chou, T.,Y., & Han, T. C. (2005). Cluster analysis based on fuzzy equivalence relation. *European journal of operational research*, 166, 160-171.
Reitreved from http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221704002760

Chiang, I. W. Y., Liang, G. S., & Yahalom S. Z. (2003). The fuzzy clustering method: Applications in the air transport market in Taiwan. *Journal of database marketing & customer strategy management*, 11 (2), 149-158.
Reitreved from https://www.researchgate.net/publication/233515524_The_fuzzy_clustering_method_Applications_in_the_air_transport_market_in_Taiwan