

ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΩΣ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΗΝ TAXICAB GEOMETRY

Νικόλαος Μεράκος
Μεταπτ. Φοιτητής ΜΣΜ
nmerakos@sch.gr

Παναγιώτης Βλάμος
Επιβλέπον_Μέλος ΣΕΠ

Περίληψη – Το κείμενο αυτό παρουσιάζει μια μη Ευκλείδεια Γεωμετρία, την Taxicab Γεωμετρία όπου με τη χρήση μιας άλλης μετρικής μελετώνται οι μεταβολές των αντίστοιχων προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργασία αυτή έγινε προσπάθεια για μια σφαιρική παρουσίαση της Taxicab Γεωμετρίας με τρόπο αντίστοιχο με αυτόν που παρουσιάζονται θέματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην δευτεροβάθμια και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Στόχος της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσει μια μη Ευκλείδεια Γεωμετρία με την οποία σχετικά εύκολα μπορούν να ασχοληθούν σπουδαστές των τελευταίων τάξεων δευτεροβάθμιας και πρώτων ετών της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης διευρύνοντας την οπτική τους σε θέματα Γεωμετρίας

II. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην εργασία αυτή γίνεται εκτενής αναφορά στους τρόπους προσδιορισμού εξισώσεων των taxicab κωνικών τομών, της taxicab μεσοκαθέτου, της taxicab τριγωνομετρίας και μάλιστα σε πολλές από αυτές τις περιπτώσεις οι αποδείξεις των τύπων είναι προϊόν προσωπικής εργασίας και δεν εμφανίζονται στην μέχρι τώρα υπάρχουσα βιβλιογραφία. Η μελέτη σχετικών δημοσιεύσεων συνέβαλε στην ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας. Σε κάθε περίπτωση έγινε προσπάθεια σύγκρισης ενός συμπεράσματος στις δύο γεωμετρίες, Ευκλείδεια και Taxicab ώστε να τονιστούν ομοιότητες και διαφορές.

III. ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

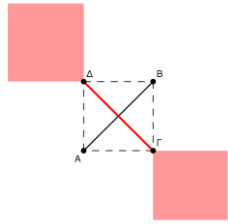
Η Taxicab Γεωμετρία είναι μια μη Ευκλείδεια Γεωμετρία βασισμένη στη taxicab μετρική, ένα μέλος μιας οικογένειας μετρικών

που δημοσιεύτηκαν από τον H. Minkowski. Η Taxicab Γεωμετρία διαφέρει από την Ευκλείδεια Γεωμετρία σε ένα μόνο αξίωμα, το αξίωμα ισότητας τριγώνων Π - Γ- Π. Ενώ η Ευκλείδεια Γεωμετρία εμφανίζεται ως ένας καλός τρόπος προσέγγισης και κατανόησης του ‘φυσικού’ κόσμου η Taxicab γεωμετρία είναι ένα καλύτερο μηχανισμός για να προσεγγίσουμε τον τεχνητό αστικό κόσμο που ο άνθρωπος έχει φτιάξει.

Στο πρώτο κεφάλαιο ορίζουμε τις έννοιες της Αφηρημένης Γεωμετρίας και της Γεωμετρίας Σύμπτωσης καταγράφοντας ένα σύνολο αξιωμάτων που πρέπει να ικανοποιούν και εισάγουμε το μοντέλο του Καρτέσιου το οποίο είναι ένα μοντέλο των γεωμετριών αυτών. Κατόπιν ορίζουμε την Μετρική Γεωμετρία.

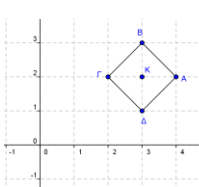
Χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές μετρικές εισάγουμε την Ευκλείδεια Γεωμετρία και την Taxicab Γεωμετρία, δύο μοντέλα της Μετρικής Γεωμετρίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αρχικά μελετάμε τις περιπτώσεις υπολογισμού της απόστασης ενός σημείου από μια ευθεία γραμμή βρίσκοντας την ελάχιστη απόσταση από ένα σημείο της ευθείας. Εάν η γραμμή έχει κλίση κατά απόλυτη τιμή μικρότερη του 1 ή μεγαλύτερη του 1 ή ίση με 1 μετράμε την απόσταση του σημείου από την γραμμή κατά μήκος μιας κατακόρυφης ευθείας στην πρώτη περίπτωση, κατά μήκος μιας οριζόντιας ευθείας στην δεύτερη περίπτωση ή κατά μήκος είτε μιας οριζόντιας είτε μιας κατακόρυφης στην τρίτη περίπτωση. Κατόπιν μελετάμε τις μορφές της taxicab μεσοκαθέτου για δύο σημεία P_1 και P_2 (του ευθύγραμμου τμήματος P_1P_2) για τις διάφορες θέσεις των P_1 και P_2 . Δίνεται η περιγραφή των κατασκευών τους καθώς και η κατηγοριοποίησή τους.

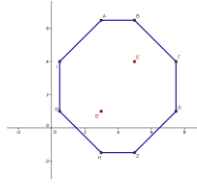


Στο παραπάνω σχήμα τα «χρωματισμένα» χωρία και το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ αποτελεί τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ

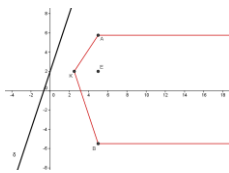
Στο **τρίτο** κεφάλαιο διερευνούμε τις κωνικές τομές στην Taxicab Γεωμετρία. Το κεφάλαιο είναι χωρισμένο σε τέσσερα μέρη, όπου στο καθένα δίνεται έμφαση σε μια κωνική τομή. Ξεκινάει με τους Taxicab κύκλους και συνεχίζει με τις Taxicab ελλείψεις, τις Taxicab παραβολές και τις Taxicab υπερβολές με διάφορα θέματα και παρατηρήσεις σε κάθε τμήμα.



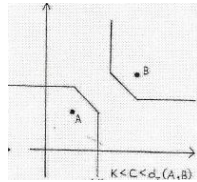
taxicab κύκλος



taxicab έλλειψη

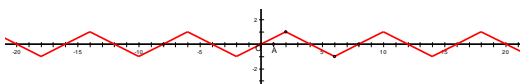


taxicab παραβολή



taxicab υπερβολή

Στο **τέταρτο** κεφάλαιο αναπτύσσουμε την τριγωνομετρία στην Taxicab γεωμετρία στο επίπεδο. Γι' αυτό τον σκοπό αρχικά ορίζουμε το μέτρο της γωνίας στην Taxicab Γεωμετρία την σχέση του με το αντίστοιχο μέτρο στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\cos_T(\theta)$, $\sin_T(\theta)$, $\tan_T(\theta)$ and $\cot_T(\theta)$. Κατόπιν προσδιορίζουμε τους τύπους της αναγωγής στο 1^ο τεταρτημόριο και τους τύπους του αθροίσματος και της διαφοράς δύο γωνιών.



Η τριγωνομετρική συνάρτηση $\sin_T(\theta)$

Στο **πέμπτο** κεφάλαιο μελετάμε τα τρίγωνα στην Taxicab Γεωμετρία. Αρχικά υπολογίζουμε το άθροισμα των γωνιών ενός

τριγώνου στην Taxicab Γεωμετρία. Έπειτα χρησιμοποιώντας παραδείγματα κάνουμε φανερό ότι το κριτήριο Π-Γ-Π (όπως επίσης και τα κριτήρια Γ-Π-Γ και Π-Π-Π) δεν ισχύουν στην Taxicab γεωμετρία. Στην Taxicab Γεωμετρία υπάρχει ένα μόνο κριτήριο ισότητας (ταύτισης) δύο τριγώνων που είναι το Π-Γ-Π-Γ-Π. Επίσης δίνουμε δύο εκδοχές του Πυθαγορείου Θεωρήματος στην Taxicab Γεωμετρία. Κατόπιν, ορίζουμε τα κανονικά πολύγωνα στην Taxicab Γεωμετρία και προσδιορίζουμε ποια κανονικά πολύγωνα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι επίσης κανονικά πολύγωνα και στην Taxicab Γεωμετρία.. Συνεχίζοντας υπολογίζουμε το εμβαδόν του τριγώνου δίνοντας μια εκδοχή του τύπου του Ήρωνα στην Taxicab Γεωμετρία. Τελικά δείχνουμε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρείται από ένα σημείο του φορέα του στον ίδιο λόγο τόσο στην Taxicab όσο και στην Ευκλείδεια Γεωμετρία γεγονός που φανερώνει ότι το θεώρημα Θαλή ισχύει και στην Taxicab Γεωμετρία.

Αυτή η μελέτη τελειώνει με το **έκτο** κεφάλαιο όπου ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο και τη νόρμα στην Taxicab Γεωμετρία και έπειτα προσεγγίζουμε το εσωτερικό γινόμενο γεωμετρικά. Επίσης συζητάμε για κάποιες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και για τις ισομετρίες στην Taxicab Γεωμετρία. Μετά από αυτό μελετάμε το μήκος καμπύλης στην Taxicab γεωμετρία. Τελικά μελετώντας την Taxicab Γεωμετρία στον Taxicab χώρο τριών διαστάσεων δίνουμε τους τύπους της απόστασης ενός σημείου από μια ευθεία, της απόστασης ενός σημείου από ένα επίπεδο και της απόστασης δύο ευθειών.

Για παράδειγμα στην Taxicab Γεωμετρία ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a} = (a_1, a_2)$ και $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ως εξής :

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_T = \begin{cases} |a_1 b_1| + |a_2 b_2|, & \text{όταν } \vec{a} \text{ και } \vec{b} \text{ είναι στο ίδιο τεταρτημόριο} \\ -|a_1 b_1| + |a_2 b_2|, & \text{όταν } \vec{a} \text{ και } \vec{b} \text{ είναι σε γειτονικά τεταρτημόρια} \\ & \text{και } a_1 b_1 < 0, a_2 b_2 > 0 \\ |a_1 b_1| - |a_2 b_2|, & \text{όταν } \vec{a} \text{ και } \vec{b} \text{ είναι σε γειτονικά τεταρτημόρια} \\ & \text{και } a_1 b_1 > 0, a_2 b_2 < 0 \\ -|a_1 b_1| - |a_2 b_2|, & \text{όταν } \vec{a} \text{ και } \vec{b} \text{ είναι σε αντίθετα τεταρτημόρια} \end{cases}$$

και την νόρμα του διανύσματος \vec{a} ως εξής

$$\|\vec{a}\|_T = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_T + 2|a_1 a_2|} = |a_1| + |a_2|.$$

ενώ οι ισομετρίες που εμφανίζονται στην Taxicab Γεωμετρία δηλ. στο \mathbb{R}_T^2 είναι

- οι παράλληλες μεταφορές $T_{\vec{a}}$ κατά διάνυσμα \vec{a} το σύνολο των οποίων συμβολίζουμε $T(2)$

•οι τέσσερις συμμετρίες ως προς ευθεία
 $S = \{(x, y) \mid x=0, y=0, y=x, \text{ και } y=-x\}$

•οι στροφές κατά γωνία θ
 $R = \left\{ A_\theta \mid \theta = \kappa \frac{\pi}{2}, \kappa = 0, 1, 2, 3 \right\}$ και όσες

προκύπτουν από αυτές

Επιπλέον ως παράδειγμα αναφέρουμε ότι η taxicab απόσταση ενός σημείου

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ από το επίπεδο \wp :
 $Ax + By + Cz + D = 0$ είναι

$$d_T(P, \wp) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\max\{|A|, |B|, |C|\}}$$

IV. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με αφετηρία τη μελέτη της Taxicab Γεωμετρίας γίνεται φανερό σε σπουδαστές των τελευταίων τάξεων δευτεροβάθμιας και πρώτων ετών της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης η πραγματική διάσταση της Γεωμετρίας ως ενός οικοδομήματος όπου ανάλογα με τα θεμέλια η μορφή των συμπερασμάτων μεταβάλλεται

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Βιβλία

Eugene F. Krause, *Taxicab Geometry, An Adventure in Non-Euclidean Geometry*, Dover Publications, Inc New York, 1975

K. Menger, *You Will Like Geometry*, Guildbook of the Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit, Museum of Science and Industry, Chicago IL, 1952

Richard S. Millman, George D. Parker *Geometry, A Metric Approach With Models*, 2^η έκδοση Springer-Verlag(1991)

H.Minkowski, *Gesammelte Abhandlungen*, Chelsea Publishing Co., New York, 1967

Άρθρα

Ziya Acka and Rustem Kaya *On the Taxicab Trigonometry*, Journal of Institute Of Mathematics and Computer Sciences (1997), Vol 10, No.3, p.151-159

Ziya Akca and Rustem Kaya, *On The Distance Formula in Three Dimensional Space*, Hadronic Journal 27, (2004), p.521-532

Ziya Akca and Rustem Kaya, *On The Norm in Higher Dimensional Taxicab Spaces*, Hadronic Journal Supplement 19, (2004), p.491-501

Ayse Bayar, Suheyla Ekmekci and Munevver Ozcan, *On trigonometric functions and cosine and sine rules in taxicab plane*, International Electronic Journal of geometry, Vol. 2, No.1 (2009), p.17-24

H. Baris Colakoglu - Rustem Kaya, *A synthetic approach to the taxicab circles*, Applied Sciences, Vol. 9 (2007)

H.B. Colakoglu, R Kaya, *Volume of a Tetrahedron in the Taxicab Space*, Missouri Journal of Mathematical Sciences, Vol. 21, No. 1, (2009) p.21-27

Robert J. Dawson, *Crackpot Angle Bisectors*, Mathematics Magazine p.59-64

Oguzan Demirel, Emine Soyturk, *The Spherical Coordinates in Taxicab Space*, International Journal of Pure and Applied Mathematics Vol.39, No.1 (2007), p.51-57

C. Ekici- I. Kocayusufoglu - Z. Akca, *The Norm in Taxicab Geometry*, Tr.J. of Mathematics, 22, No.3 (1998), p.295-307

Y. Phoebe Ho and Yan Liu, *Parabolas in Taxicab Geometry*, Missouri J. of Math. Sci., 8 (1996), p.63-72

Louise Golland, *Karl Menger and Taxicab Geometry*, Mathematics Magazine Vol.63, No 5

David Iny, *Taxicab Geometry: Another look at conic sections*, Vol.7, No. 10 (1984), p.645-647

Christina Janssen, *Taxicab Geometry: Not the Shortest Ride Across Town (Exploring Conics with a Non - Euclidean Metric)*, dissertation (unpublished), Iowa State University, Jul. 2007

R. Kaya, *Area Formula for Taxicab Triangles*, Pi Mu Epsilon Journal 12 (ΠΜΕ) (2006), p.213-220

Rustem Kaya, H.B. Colakoglu, *Taxicab Versions of Some Eukclidean Theorems*, Int. Jour. of Pure and Appl. Math. 26 (2006), p. 69-81

Rustem Kaya - Ziya Akca - Ibrahim Gunaltili - Munevver Ozcan, *General Equation For Taxicab Conics And Their Classification*, Mitt. Math. Ges Hamburg, 19 (2000), p.135-148

Rustem Kaya, Harun Baris Colacoglu, *Regular Polygons in the Taxicab Plane*, Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics, Vol 12 (2008), p.27-33

I. Kocayusufoglu and E. Ozdamar, *Isometries of Taxicab Geometry*, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. V. 47 (1998), p.73-83

Richard Laatsch, *Pyramidal Sections in Taxicab Geometry*, Mathematics Magazine Vol. 55, No.4 (1982) p.205-212

Joseph M. Moser and Fred Cramer, *Lines and Parabolas in Taxicab Geometry*, Pi Mu Epsilon Journal, Vol7, No7 (1982), p.441-444

Munevver Ozcan, Suheyla Ekmekci and Ayse Bayar, *A note on the variation of the taxicab lengths under rotations*, The Pi Mu Epsilon Journal (ΠΜΕ) (2002), Vol 1, No 7, p.381-384

Munevver Ozcan and Rustem Kaya, *Area of a triangle in terms of the taxicab distance*, Missouri J. of Math Sci., 15 (2003), p.178-185

M.Ozcan, R. Kaya, *On the Ratio of Directed Lengths in the Taxicab Plane and Related Properties*, Missouri J. Math. Sci. 14 (2002) p.107-117

Barbara E. Reynolds, *Taxicab Geometry*, Pi Mu Epsilon Journal, Vol.7, No2 (1980) p.77-78

Shing-Seung So, Zuwaina S. Al-Maskari, *Two Simple Examples in Non-Euclidean Geometry*, Kansas Science Teacher (J. of Math. and Science Teaching) 11 (1995), p.14-18

Katy O. Sowell, *Taxicab Geometry - A New Slant*, Mathematics Magazine, Vol. 62, No. 4 (1989), 238-248

D. J. Schattschneider, *The Taxicab Group*, Amer. Math. Monthly.91 (1984) p.423-428

Kevin Thompson and Tevian Dray, *Taxicab Angles and Trigonometry*, The Pi Mu Epsilon Journal, Worcester, MA. Vol.11, No.2 (2000) p. 87-97

Kevin P. Thompson, *The Nature of Length, Area and Volume in Taxicab Geometry*, International Electronic Journal of Geometry, Vol.4, No.2 (2011) p.193-207

Songlin Tiana, SoaShing-Seungand Chen Guangui, *Concerning Circles in Taxicab Geometry*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 28 (1997), p.727-733

[36] Kevin P. Thompson, *Taxicab Triangle Incircles and Circumcircles* to appear in The Pi MU Epsilon Journal (see author's home page)

Ιστοσελίδες

Taxicab Geometry : Information and research about the geometry invited by Herman Minkowski

<http://www.taxicabgeometry.net/index.html>

Taxicab Geometry: Mathematische Basteleien

[http://www.mathematisce-basteleien.de/
taxicabgeometry.html](http://www.mathematisce-basteleien.de/taxicabgeometry.html)
University of Georgia : TaxicabGeometry with
Technology – Some Exploration Materials by Jim Wilson
[http://jwilson.coe.uga.edu/MATH7200/TaxiCab/
TaxiCab.html](http://jwilson.coe.uga.edu/MATH7200/TaxiCab/TaxiCab.html)